खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) दर्शाइये कि गुणनात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$, जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ है, समूह $G' = (\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$ के तुल्याकारी है।

Show that the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$, where $i = \sqrt{(-1)}$, is isomorphic to the group $G' = (\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$. 10

(b) यदि $f(z) = u + iv$, z का एक विश्लेषिक फलन है, तथा $u - v = \dfrac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}$ है, तब शर्त $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ के अधीन $f(z)$ का मान ज्ञात कीजिये।

If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of z, and $u - v = \dfrac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}$, then find $f(z)$ subject to the condition $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. 10

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}\,dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

Test the convergence of $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}\,dx$. 10

(d) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2 (z-3)}$ का क्षेत्रों *(i)* $0 < |z-1| < 2$ एवं *(ii)* $0 < |z-3| < 2$ के लिये वैध लौराँ श्रेणी में विस्तार कीजिये।

Expand $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2 (z-3)}$ in a Laurent series valid for the regions *(i)* $0 < |z-1| < 2$ and *(ii)* $0 < |z-3| < 2$. 10

(e) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिये द्विचरण विधि का उपयोग कीजिये :

न्यूनतमीकरण कीजिये $Z = x_1 + x_2$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 7x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Use two-phase method to solve the following linear programming problem :

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 7x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

10

2. (a) मान लीजिये कि $[0, k]$, $k > 0$ पर $f(x) = x^2$ है। दर्शाइये कि f बंद अन्तराल $[0, k]$ पर रीमान समाकलनीय है तथा $\int_0^k f\, dx = \frac{k^3}{3}$ है।

Let $f(x) = x^2$ on $[0, k]$, $k > 0$. Show that f is Riemann integrable on the closed interval $[0, k]$ and $\int_0^k f\, dx = \frac{k^3}{3}$. 15

(b) सिद्ध कीजिये कि एक समूह G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग समूह के तुल्याकारी है।

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G. 15

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $a > b > 0$ के मान निकालने के लिये अवशेष-कलन का उपयोग कीजिये।

Apply the calculus of residues to evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $a > b > 0$. 20

3. (a) $\int_C \frac{z+4}{z^2 + 2z + 5} dz$ का मान निकालिये, जहाँ C, $|z + 1 - i| = 2$ है।

Evaluate $\int_C \frac{z+4}{z^2 + 2z + 5} dz$, where C is $|z + 1 - i| = 2$. 15

(b) $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ के अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिये, जब $lx + my + nz = 0$ तथा $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ है। परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या कीजिये।

Find the maximum and minimum values of $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$, when $lx + my + nz = 0$ and $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Interpret the result geometrically. 20

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा विधि द्वारा हल कीजिये। इसकी द्वैती समस्या लिखिये। दी गयी समस्या की इष्टतम सारणी से द्वैती समस्या का इष्टतम हल भी लिखिये :

अधिकतमीकरण कीजिये $Z = x_1 + x_2 + x_3$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem :

Maximize $Z = x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

15

4. (a) मान लीजिये कि R वास्तविक संख्याओं का एक क्षेत्र है तथा S, उन सभी बहुपदों $f(x) \in R[x]$, जिनके लिये $f(0) = 0 = f(1)$ है, का क्षेत्र है। सिद्ध कीजिये कि S, $R[x]$ की एक गुणजावली है। क्या अवशेष वर्ग वलय $R[x]/S$ एक पूर्णांकीय प्रांत है? अपने उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिये।

Let R be a field of real numbers and S, the field of all those polynomials $f(x) \in R[x]$ such that $f(0) = 0 = f(1)$. Prove that S is an ideal of $R[x]$. Is the residue class ring $R[x]/S$ an integral domain? Give justification for your answer.

15

(b) श्रेणी $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \frac{5^5 x^5}{5!} + \cdots \ (x > 0)$ के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिये।

Test for convergence or divergence of the series

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \frac{5^5 x^5}{5!} + \cdots \ (x > 0)$$

15

(c) वोगेल की सन्निकटन विधि से निम्नलिखित परिवहन समस्या का आरंभिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिये। इस हल का उपयोग कर समस्या का इष्टतम हल एवं परिवहन लागत ज्ञात कीजिये :

गन्तव्य

		A	B	C	D	
उद्गम	S_1	21	16	25	13	11
	S_2	17	18	14	23	13 *प्राप्यता*
	S_3	32	27	18	41	19
	माँग	6	10	12	15	43

Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem by Vogel's approximation method and use it to find the optimal solution and the transportation cost of the problem :

		Destination A	B	C	D	Availability
Source	S_1	21	16	25	13	11
	S_2	17	18	14	23	13
	S_3	32	27	18	41	19
Requirement		6	10	12	15	43

20

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) दिया गया है कि शीर्ष (a, b, c) वाले किसी शंकु का समीकरण $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$ है। शंकु का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये।

It is given that the equation of any cone with vertex at (a, b, c) is $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$. Find the differential equation of the cone. 10

(b) गाउस विलोपन विधि द्वारा समीकरण निकाय

$$2x+2y+4z=18$$
$$x+3y+2z=13$$
$$3x+y+3z=14$$

को हल कीजिये।

Solve, by Gauss elimination method, the system of equations

$$2x+2y+4z=18$$
$$x+3y+2z=13$$
$$3x+y+3z=14$$

10

(c) (i) संख्या $(1093 \cdot 21875)_{10}$ को अष्टाधारी तथा संख्या $(1693 \cdot 0628)_{10}$ को षोडश-आधारी पद्धति में बदलिये।

(ii) बूलीय फलन $F(x, y, z)=xy+x'z$ को योपद (मैक्सटर्म) के गुणन के रूप में अभिव्यक्त कीजिये।

(i) Convert the number $(1093 \cdot 21875)_{10}$ into octal and the number $(1693 \cdot 0628)_{10}$ into hexadecimal systems.

(ii) Express the Boolean function $F(x, y, z)=xy+x'z$ in a product of maxterms form. 10

(d) एक कण, जो बल-केन्द्र से r दूरी पर है, केन्द्रीय बल $F = -\frac{k}{r^2}$, जहाँ k एक स्थिरांक है, के प्रभाव में गतिमान है। लग्रांजियन निकालिये तथा गति के समीकरणों को व्युत्पन्न कीजिये।

A particle at a distance r from the centre of force moves under the influence of the central force $F = -\frac{k}{r^2}$, where k is a constant. Obtain the Lagrangian and derive the equations of motion. 10

(e) किसी असंपीड्य तरल के गोलीय ध्रुवी निर्देशांकों (r, θ, ψ) में वेग-घटक $(2Mr^{-3}\cos\theta,\ Mr^{-2}\sin\theta, 0)$ हैं, जहाँ M एक स्थिरांक है। दर्शाइये कि वेग, विभव प्रकार का है। वेग विभव तथा धारारेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये।

The velocity components of an incompressible fluid in spherical polar coordinates (r, θ, ψ) are $(2Mr^{-3}\cos\theta,\ Mr^{-2}\sin\theta, 0)$, where M is a constant. Show that the velocity is of the potential kind. Find the velocity potential and the equations of the streamlines. 10

6. (a) ऊष्मा समीकरण $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $t > 0$ का शर्तों

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$
$$u(x, 0) = x(l - x),\ 0 \le x \le l$$

से प्रतिबन्धित हल ज्ञात कीजिये।

Solve the heat equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$, $t > 0$ subject to the conditions

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$
$$u(x, 0) = x(l - x),\ 0 \le x \le l$$

20

(b) बूलीय फलन $f(x, y, z) = [x \cdot (\bar{y} + z)] + y$ का संगत संचयविन्यास परिपथ (कॉम्बिनेटोरियल सर्किट) ज्ञात कीजिये तथा परिपथ के लिये निवेश/निर्गत (इनपुट/आउटपुट) सारणी लिखिये।

Find a combinatorial circuit corresponding to the Boolean function

$$f(x, y, z) = [x \cdot (\bar{y} + z)] + y$$

and write the input/output table for the circuit. 15

(c) एक लम्ब वृत्तीय ठोस शंकु का उसकी संहति M, ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या a के रूप में उसकी एक तिर्यक् रेखा (जनक रेखा) के सापेक्ष जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

Find the moment of inertia of a right circular solid cone about one of its slant sides (generator) in terms of its mass M, height h and the radius of base as a. 15

7. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)z = x^2 \sin(x+y)$$

जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, का व्यापक हल ज्ञात कीजिये।

Find the general solution of the partial differential equation

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)z = x^2 \sin(x+y)$$

where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. 15

(b) एक रेलगाड़ी, जो कि विश्राम से चलना प्रारंभ करती है, का वेग निम्नलिखित सारणी द्वारा दिया गया है। प्रस्थान से समय की गणना मिनट में तथा वेग की कि० मी०/घण्टा में की गयी है :

t (मिनट)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (कि० मी०/घण्टा)	16	28·8	40	46·4	51·2	32	17·6	8	3·2	0

सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम का उपयोग करके 20 मिनट में तय की गयी कुल दूरी (लगभग) का आकलन कि० मी० में कीजिये।

The velocity of a train which starts from rest is given by the following table, the time being reckoned in minutes from the start and the velocity in km/hour :

t (minutes)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v (km/hour)	16	28·8	40	46·4	51·2	32	17·6	8	3·2	0

Using Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule, estimate approximately in km the total distance run in 20 minutes. 15

(c) दो बिन्दु भ्रमिल, जहाँ प्रत्येक का सामर्थ्य k है, $(\pm a, 0)$ पर स्थित हैं तथा $-\frac{k}{2}$ सामर्थ्य का एक बिन्दु भ्रमिल, मूलबिन्दु पर स्थित है। दर्शाइये कि तरल गति अचल है तथा धारारेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिये। यदि धारारेखाएँ, जो कि प्रगतिरोध बिन्दुओं (स्टैगनेशन पॉइन्ट) से गुजरती हैं, x-अक्ष पर $(\pm b, 0)$ पर मिलती हैं, तब दर्शाइये कि $3\sqrt{3}(b^2 - a^2)^2 = 16a^3 b$.

Two point vortices each of strength k are situated at $(\pm a, 0)$ and a point vortex of strength $-\frac{k}{2}$ is situated at the origin. Show that the fluid motion is stationary and also find the equations of streamlines. If the streamlines, which pass through the stagnation points, meet the x-axis at $(\pm b, 0)$, then show that $3\sqrt{3}(b^2 - a^2)^2 = 16a^3 b$. 20

8. *(a)* निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण

$$yu_{xx} + (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

को विहित रूप में समानीत कीजिये और अतएव इसको हल कीजिये।

Reduce the following partial differential equation to a canonical form and hence solve it :

$$yu_{xx} + (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

15

(b) चतुर्थ कोटि की रुन्गे-कुट्टा विधि का उपयोग करके अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = x + y^2$, जबकि $y(0) = 1$ है, को $x = 0 \cdot 2$ पर हल कीजिये। परिकलन में दशमलव के चार स्थानों तक तथा पग लम्बाई (स्टेप लेंथ) $0 \cdot 1$ का उपयोग कीजिये।

Using Runge-Kutta method of fourth order, solve the differential equation $\dfrac{dy}{dx} = x + y^2$ with $y(0) = 1$, at $x = 0 \cdot 2$. Use four decimal places for calculation and step length $0 \cdot 1$.

15

(c) सत्यापित कीजिये कि एक वृत्ताकार बेलन के इर्द-गिर्द एक तरल के अपरिवर्ती प्रवाह का सम्मिश्र विभव $w = ik \log \{(z - ia) / (z + ia)\}$ है, जहाँ समतल $y = 0$ एक दृढ़ सीमा है। बेलन की एकक लम्बाई (यूनिट लेंथ) पर तरल द्वारा लगाये गये बल को भी ज्ञात कीजिये।

Verify that $w = ik \log \{(z - ia) / (z + ia)\}$ is the complex potential of a steady flow of fluid about a circular cylinder, where the plane $y = 0$ is a rigid boundary. Find also the force exerted by the fluid on unit length of the cylinder. 20

★ ★ ★